PAGE 117 / ÉPREUVE EN POULE

Q1 Comme on veut qu'à chaque journée, toutes les équipes soient sur le pont, une condition nécessaire élémentaire est que le **nombre** d'équipes soit **pair**. Mais rien ne prouve (encore !) que cette condition soit suffisante. Si le nombre d'équipes est impair, la parade consiste à ajouter une **équipe fantôme** qu'on traitera comme les autres dans le mouvement, si ce n'est qu'à chaque journée, son adversaire désigné sera **exempt**, c'est à dire dispensé de jouer un match.
Le nombre d'équipes étant $2n$, chaque équipe devra jouer, à tour de rôle, l'une des $2n - 1$ autres lors de chaque journée. Il y aura donc $\mathbf{2n - 1}$ journées.
Chaque journée verra se disputer n matchs concernant chacun 2 des $2n$ équipes. Il y aura donc, en tout, $\mathbf{(2n - 1)\,n}$ matchs.

Q2 On vérifie d'abord que, lors de **chaque journée**, les **6 équipes** apparaissent (c'est à dire qu'aucune n'est impliquée 2 fois), puis que **A rencontre** successivement chacune des **5 autres**, puis que **B rencontre C, D, E et F** (on a déjà vérifié la rencontre A-B), puis que **C rencontre D, E, F**, puis **D contre E et F**, puis **E contre F**.

Q3 Lors de la 1re journée, la disposition des équipes est telle que la somme des numéros des 2 équipes installées à chaque table est la même : $2n + 1$. L'une des équipes (celle de la rangée du bas) a le même numéro que la table. Les 2 équipes de la table E_i sont donc $\boldsymbol{i}$ et $\mathbf{2n + 1 - i}$
À la question 2, on a 6 équipes, soit $\mathbf{n = 3}$ tables. En faisant jouer à « Lieu » 1, 2 et 3 le rôle des « emplacements » du schéma et en numérotant de 1 à 6 les équipes A à F, on vérifie qu'au match 1, les équipes occupent bien les places indiquées sur le schéma, que l'équipe F reste en permanence à l'emplacement **1** et que les **5 autres tournent en rond** conformément au schéma.

L'équipe $2n$, **immobile,** voit défiler en face de son emplacement $\mathbf{E_1}$ chacune des $2n - 1$ autres équipes dans **l'ordre décroissant** 1, $2n - 1$, $2n - 2$,…, 3, 2. Cette régularité assure qu'elle ne peut en rencontrer aucune plusieurs fois et le défilé s'arrête au numéro 2 puisqu'il y a $2n - 1$ journées.

On prend une équipe mobile quelconque ***i*** ; on sait déjà que cette équipe rencontre **une fois et une seule l'équipe fixe 2*n*** ; prenons une autre équipe mobile ***j*** : si *i* et *j* ne se rencontrent jamais, forcément ça **ne fera pas plusieurs fois** ! Sinon, elles vont **se rencontrer une première fois** une certaine journée ; à ce moment là, elles sont sur le même emplacement, l'une dans la rangée du haut, l'autre dans celle du bas ; les journées suivantes, tant qu'aucune des 2 ne changera de rangée, elles vont **se déplacer en sens inverse et s'éloigner** et, comme elles se déplacent d'une case à chaque fois, elles seront simultanément toutes les 2 sur un emplacement **de même parité** (simultanément pair ou simultanément impair). Ensuite si **l'une prend un virage avant l'autre**, elles vont se retrouver sur la même rangée, donc forcément sur des **emplacements différents**. Ensuite, quand elles auront **viré une fois chacune**, elles se retrouveront de nouveau sur des **rangées différentes** mais forcément l'une aura pris le virage de droite qui ne fait pas changer la parité de l'emplacement (passage de E_n à E_n) et l'autre le virage de gauche qui fait changer de parité (passage de E_2 à E_1), donc tant qu'elles resteront sur ces rangées, elles seront, cette fois, sur des **emplacements de parité différente** et ne pourront pas se rencontrer. Elles ne pourraient ensuite se rencontrer qu'après avoir pris chacune un 2e virage, et cela interviendrait après avoir effectué un **tour complet**, c'est à dire **2*n* journées** après leur rencontre initiale ; **trop tard** puisque la poule n'a que $2n - 1$ journées.

On a vu qu'aucun match ne peut se répéter. Chaque équipe rencontre donc **0 ou 1 fois** chacune des $2n - 1$ autres équipes. On focalise sur une équipe : supposons qu'il y en ait *j* qu'elle rencontre 0 fois et $(2n - 1 - j)$ 1 fois, cela lui ferait un nombre total de matchs disputés de $0 \times j + 1 \times (2n - 1 - j) = \mathbf{2n - 1 - j}$; or elle a disputé 1 match à chacune des $\mathbf{2n - 1}$ journées, c'est donc que $\mathbf{j = 0}$. Chaque équipe a bien rencontré une fois et une seule chacune des autres.

Q4 On va séparer les $4p$ équipes en **2 groupes de $2p$ équipes** et le calendrier en 2 phases.

➢ **1re phase**

Chaque **groupe de $2p$ dispute séparément une poule**, par exemple selon le schéma de la chenille. Cette phase dure donc $2p - 1$ journées.

➢ **2e phase**

Chaque **équipe d'un groupe** va jouer un match c**ontre chacune des $2p$ équipes de l'autre groupe** ; le mouvement est simple à mettre en œuvre: les équipes du 2e groupe défilent à la queue-leu-leu devant les équipes immobiles de l'autre groupe. Cette 2e phase dure $2p$ journées, ce qui en fait $4p - 1$ en tout et chaque équipe a rencontré 1 fois chacune des autres. L'intérêt pratique est que la 1e phase peut se dérouler en $2p - 1$ journées situées en deux lieux distincts, un pour chaque sous-poule.



Pour construire, ce calendrier, on a appliqué consciencieusement le **mode d'emploi pour $4p$** équipes. On a rangé les 8 équipes de 1 à 8 par ordre alphabétique. Les 3 premières journées correspondent à 2 poules indépendantes, la 1re regroupant les équipes 1 à 4 et la 2e les équipes 5 à

8. Les 4 dernières journées voient chaque match opposer une équipe de la poule 1 initiale à une équipe de la poule 2.

On a $3p + 1$ équipes. D'abord, on remarque que ***p*** est **impair** puisque $3p + 1$ doit être pair. On sépare les équipes en 3 groupes (A, B et C) de p, plus une équipe dite« pivot » et le calendrier comprendra 3 phases.
1re phase: l'équipe **pivot se joint au groupe A** pour former une **mini-poule de *p* + 1 équipes** ($p + 1$ est bien pair), qui va dérouler tous ses matchs en p journées. En même temps, **chaque équipe du groupe B rencontre chaque équipe du groupe C**, ce qui occupe aussi p journées.
Les **2e et 3e phases** se déroulent selon le **même scénario**, avec le pivot qui se joint au groupe B puis au C pour disputer une poule tandis que les 2 autres groupes jouent l'un contre l'autre. Au total 3 phases de p journées ; chaque équipe a joué contre les $3p$ autres et on peut faire disputer chacune des trois phases en seulement deux lieux distincts.

Extensions possibles de l'activité

En guise de travail complémentaire, il peut être demandé de triturer un calendrier-type, une fois qu'il est établi, pour prendre en compte des contraintes pratiques, par exemple faire en sorte que tous les derbys aient lieu lors de la 1re journée, ou que les 2 favoris se rencontrent lors de la dernière, *etc.*